Лекція № 31

9.4. Сила променевого тертя

Досі ми вважали, що густина зарядів та густина струмів є завданими величинами. Це наближена точка зору, бо поле, яке створюють заряди, в свою чергу діє заряди та змінює їх рух. Це реакція випромінювання.

Електрон в атомі рухається прискорено, тому випромінює електромагнітні хвилі, тому втрачає енергію, та падає на ядро. Це класична точка зору. В квантовій механіці постулюється існування стабільних орбіт – існування стаціонарних станів.

Тут ми розглянемо поведінку заряду, який рухається із прискоренням з точки зору класичної електродинаміки.

Зміна за одиницю часу енергії заряду, який рухається й випромінює електромагнітні хвилі визначається повною інтенсивністю випромінювання по всіх напрямках. Скористаємось формулою (9.19), яка визначає повну інтенсивність дипольного випромінювання довільно рухомого нерелятивістського заряду

$$\frac{d\varepsilon_{кін.}}{dt} = -I = -\frac{2e^2\ddot{\vec{r}}^2}{3c^3}. \qquad (9.22)$$

Заряд є нерелятивістським, тому його кінетична енергія

$$\varepsilon_{кін.} = \frac{m\upsilon^2}{2}; \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{f};$$

$$\frac{d\varepsilon_{кін.}}{dt} = m\dot{\vec{\upsilon}}\vec{\upsilon} = \left(m\ddot{\vec{r}}\right)\dot{\vec{r}} = \vec{f}\dot{\vec{r}}.$$

Підставимо в (9.22) $\frac{d\varepsilon_{кін.}}{dt}$ у вигляді $\vec{f}\dot{\vec{r}}$ та виконаємо деякі перетворення правої частини

$$\vec{f}\dot{\vec{r}} = -\frac{2e^2\ddot{\vec{r}}^2}{3c^3};$$

$$\ddot{\vec{r}}^2 = \left(\ddot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right) = \left(\ddot{\vec{r}},\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\ddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right) - \left(\dddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right);$$

$$\left(\vec{f},\dot{\vec{r}}\right) = -\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d}{dt}\left(\ddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right) - \left(\dddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right)\right).$$

Проведемо усереднення отриманого виразу. Середнє значення похідної в правій частині, згідно доведеної раніше теореми дорівнює нулю:

$$\overline{\frac{d}{dt}\left(\ddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right)}=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\frac{d}{dt}\left(\ddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right)dt\right)\to 0.$$

Шукаємо середню силу:

$$\overline{\left(\vec{f},\dot{\vec{r}}\right)}=-\frac{2e^2}{3c^3}\underbrace{\cancel{\frac{d}{dt}\left(\ddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right)}}_{=0}+\frac{2e^2}{3c^3}\overline{\left(\dddot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right)}.$$

$$\vec{f}_{тертя}=\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}.$$

Отримали вираз для сили променевого тертя

$$\vec{f}_{тертя}=\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}. \tag{9.23}$$

Сила променевого тертя обумовлена оберненою дією випромінювання на заряди.

Розглянемо ситуацію, коли єдиною силою, яка діє на заряд є сила (9.23). Спробуємо відшукати розв’язок рівняння руху такого заряду

$$m\dot{\vec{\upsilon}}=\vec{f}_{тертя} \tag{9.24}$$

$$m\dot{\vec{\upsilon}}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{\upsilon}};\quad \ddot{\vec{\upsilon}}=\frac{3c^3m}{2e^2}\dot{\vec{\upsilon}};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\upsilon}}\right)=\frac{3c^3m}{2e^2}\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}\right);\quad \dot{\vec{\upsilon}}=\frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}+\vec{C}.$$

Виберемо такі початкові умови

$$\vec{\upsilon}(0)=\vec{\upsilon}_0;\quad \dot{\vec{\upsilon}}(0)=\vec{a}.$$

Шукаємо сталу інтегрування $\vec{C}$:

$$\dot{\vec{\upsilon}}(0)=\frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}(0)+\vec{C};\quad \vec{a}=\frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}_0+\vec{C};$$

$$\vec{C}=\vec{a}-\frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}_0.$$

Маємо неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}=\vec{a}-\frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}_0.$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon} = 0;$$

$$\vec{\upsilon}_{одн.} = \vec{C}_1 e^{\frac{3c^3m}{2e^2}t};$$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді сталої (бо права частина – стала величина)

$$\vec{\upsilon}_{неодн.} = const$$

$$\cancel{\frac{d\vec{\upsilon}_{неодн.}}{dt}} - \frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}_{неодн.} = \vec{a} - \frac{3c^3m}{2e^2}\vec{\upsilon}_0;$$

$$\vec{\upsilon}_{неодн.} = \vec{\upsilon}_0 - \frac{2e^2}{3c^3m}\vec{a}.$$

Маємо

$$\vec{\upsilon} = \vec{C}_1 e^{\frac{3c^3m}{2e^2}t} + \vec{\upsilon}_0 - \frac{2e^2}{3c^3m}\vec{a}.$$

Врахуємо початкову умову $t = 0$

$$\vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_0;$$

$$\cancel{\vec{\upsilon}_0} = \vec{C}_1 + \cancel{\vec{\upsilon}_0} - \frac{2e^2}{3c^3m}\vec{a};$$

$$\vec{C}_1 = \frac{2e^2}{3c^3m}\vec{a}.$$

Отримали такий результат

$$\vec{\upsilon} = \frac{2e^2}{3c^3m}\left(e^{\frac{3c^3m}{2e^2}t} - 1\right) + \vec{\upsilon}_0. \quad (9.25)$$

З формули (9.25) виходить, що заряд збільшує з часом свою швидкість!!! Має місце якесь нефізичне самоприскорення, порушується закон збереження енергії!!! Висновок робимо такий: не можна вважати силу променевого тертя єдиною силою, яка діє на заряд, що рухається прискорено, бо саме прискорення є наслідком руху у зовнішньому полі.

Нагадаємо умови застосування формул класичної електродинаміки. Відстані від зарядів повинні бути набагато більшими ніж «класичний» (6.53) та «квантовий» (6.54) радіуси електрона:

$$R_e \sim \frac{e^2}{m_e c^2}; \quad R_{quant.} \sim \frac{\hbar}{mc}; \quad \frac{R_{quant}}{R_e} = \frac{\hbar c}{e^2} = 137.$$

Розглянемо рівняння руху нерелятивістського заряду в електромагнітному поля при наявності сили променевого тертя (9.23)

$$m\dot{\vec{\upsilon}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{\upsilon},\vec{H}\right] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{\upsilon}}. \tag{9.26}$$

Вважатимемо, що зовнішнє поле створює сили, які набагато більші, ніж сила променевого тертя:

$$m\dot{\vec{\upsilon}} = \underbrace{e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{\upsilon},\vec{H}\right]}_{зовн.сила} + \underbrace{\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{\upsilon}}}_{сила\ пром.тертя}.$$

Припустимо, що в нашій ІСВ в даний момент часу швидкість руху заряду дорівнює 0 $\vec{\upsilon} = 0$ та візьмемо ще одну похідну по часу

$$m\ddot{\vec{\upsilon}} = e\dot{\vec{E}} + \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{\upsilon}},\vec{H}\right] + \underbrace{\cancel{\frac{e}{c}\left[\vec{\upsilon},\dot{\vec{H}}\right]}}_{=0} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{\upsilon}}.$$

Розв’язок шукаємо методом послідовних наближень по малому параметру $\upsilon / c \ll 1$:

$$(0)\ \ m\dot{\vec{\upsilon}}^{(0)} = e\vec{E};\quad \dot{\vec{\upsilon}}^{(0)} = \frac{e\vec{E}}{m};$$

$$(1)\quad m\ddot{\vec{\upsilon}}^{(1)} = e\dot{\vec{E}} + \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{\upsilon}}^{(0)},\vec{H}\right];\quad m\ddot{\vec{\upsilon}}^{(1)} = e\dot{\vec{E}} + \frac{e}{c}\left[\frac{e\vec{E}}{m},\vec{H}\right];$$

$$\ddot{\vec{\upsilon}}^{(1)} = \frac{1}{m}\left(e\dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{mc}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right).$$

Підставимо $\ddot{\vec{\upsilon}}^{(1)}$ в формулу (9.23):

$$\vec{f}_{тертя} = \frac{2e^2}{3mc^3}\left(e\dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{mc}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right) = \underbrace{\frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec{E}}}_{(a)} + \underbrace{\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left[\vec{E},\vec{H}\right]}_{(б)}. \tag{9.27}$$

Співвідношення між доданками в (9.27) є таким (*а*) << (*б*).

Сила променевого тертя повинна бути набагато меншою, ніж зовнішні сили.

Нехай електричне поле змінюється періодично $\dot{E} \sim \omega E$. Треба, щоб виконувалась нерівність:

$$eE \gg \frac{e^3}{mc^3}\omega E; \quad \underbrace{\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)}_{R_e}\frac{\omega}{c} \ll 1;$$

$$R_e\frac{\omega}{c} \ll 1; \quad \frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \frac{R_e}{\lambda} \ll 1.$$

Довжина зовнішньої електромагнітної хвилі повинна бути набагато більшою розміру заряду:

$$\lambda \gg R_e. \tag{9.28}$$

Нерівність для (*б*):

$$eE \gg \frac{2e^4}{3m^2c^4}EH; \quad \frac{e^3}{m^2c^4}H \ll 1;$$

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}; \quad \frac{e^2}{mc^3}\omega_H \ll 1; \quad \underbrace{\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)}_{R_e}\frac{\omega_H}{c} \ll 1;$$

$$R_e\frac{\omega_H}{c} \ll 1.$$

або

$$\frac{c}{\omega_H} \gg R_e \tag{9.29}$$

Перепишемо ці нерівності відносно магнітного поля:

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3} = \left(\frac{mc^2}{e^2}\right)^2 e \sim \frac{e}{R_e^2}. \tag{9.30}$$

З нерівності (9.30) випливає, що зовнішнє поле повинно бути слабким. Поля $\sim \dfrac{m^2c^4}{e^3}$ є границею, за якою класична електродинаміка призводить до протиріч. Насправді треба ще врахувати квантові ефекти, тому поля є ще меншими:

$$\hbar\omega_H \sim mc^2; \quad \frac{\hbar eH}{mc} \sim mc^2; \quad H \sim \frac{m^2c^3}{e\hbar} = \underbrace{\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)}_{\frac{1}{137}}\underbrace{\left(\frac{mc^2}{e^2}\right)^2}_{\frac{1}{R_e^2}} e = \frac{1}{137}\frac{e}{R_e^2}$$

10. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{10.1}$$

Наведені в (10.1) рівняння Максвелла в вакуумі є справедливими й тоді, коли крім поля та зарядів, що його створюють, є також середовище, яке взаємодії з полем. Заряди, з яких складається середовище від дією електромагнітного поля можуть рухатися. В середовищі виникають струми ($\vec{j}$). Перерозподіл зарядів в середовищі створює області з ненульовою густиною зарядів ($\rho \neq 0$). З іншого боку ці наведені струми та заряди також стають джерелами електромагнітного поля. Електромагнітне поле визначає рух зарядів та струмів в середовищі та водночас само визначається наведеними ним зарядами та струмами. Коли зміна напруженостей електричного та магнітного полів при взаємодії поля із середовищем по порядку величини є є такою ж, як напруженості початкового поля, то треба шукати самоузгоджене електромагнітне поле. В цьому полягає задача електродинаміки суцільних середовищ.

Досі ми вважали, що речовини так мало, що вона істотно не впливає на поле. Ми розглядали рух зарядів в заданому полі й нехтували впливом поля на рух зарядів. Коли цього зробити не можна, речовину слід вважати середовищем, що взаємодіє з полем.

Основу електродинаміки суцільних середовищ становлять мікроскопічні рівняння Максвелла, які справедливі за умов, що описані вище. Напишемо рівняння Максвелла з урахуванням поділу зарядів та струмів на зовнішні та створювані самим середовищем:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{ext}); \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{ext}) + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{10.2}$$

В формулах (10.2) ρ та $\vec{j}$ залежать від $\vec{E}$ та $\vec{H}$. Зовнішні заряди та струми ρ_{ext}, $\vec{j}_{ext}$ від $\vec{E}$ та $\vec{H}$ не залежать. Це зовнішні (сторонні) величини. Характер розв’язку задачі в значній мірі визначається виглядом залежності ρ та $\vec{j}$ від $\vec{E}$ та $\vec{H}$, а ця залежність в свою чергу визначається характером руху зарядів в полях:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right]\right) + \vec{F}_{ext}. \qquad (10.3)$$

Рівняння (10.2) плюс (10.3) визначають електромагнітне поле, яке називають мікроскопічним.

Кількість заряджених частинок в речовині надзвичайно велика, тому реально розв’язати рівняння (10.3) неможливо. Рівняння Максвелла (10.2) треба усереднювати статистично по ρ та $\vec{j}$ й по фізично нескінченно малим об’ємам, нехтуючи різкою зміною полів на атомних відстанях.

10.1. Усереднення рівнянь Максвелла

Усереднення рівнянь (10.2) відбувається по часу (статистичне усереднення) та простору (по фізично нескінченно малим об’ємам).

Визначимо процедуру усереднення:

$$\bar{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int\limits_{\Delta V} d^3 r' \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} d\tau \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}', t + \tau) \qquad (10.4)$$

Формула визначає макроскопічне поле

Вважаємо, що можна змінювати місцями усереднення та диференціювання

$$\overline{\mathrm{rot}\vec{E}} = \mathrm{rot}\bar{\vec{E}}; \quad \overline{\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)} = \frac{\partial \bar{\vec{E}}}{\partial t}.$$

Після формального усереднення отримуємо замість (10.2)

$$\begin{cases} \mathrm{div}\bar{\vec{H}} = 0; \\ \mathrm{rot}\bar{\vec{E}} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \bar{\vec{H}}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\bar{\vec{E}} = 4\pi(\bar{\rho} + \bar{\rho}_{ext}); \\ \mathrm{rot}\bar{\vec{H}} = \dfrac{4\pi}{c}(\bar{\vec{j}} + \bar{\vec{j}}_{ext}) + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \bar{\vec{E}}}{\partial t}. \end{cases}$$

Введемо позначення, прийняті в електродинаміці суцільних середовищ:

$\bar{\vec{H}} = \vec{B}$ – вектор магнітної індукції; $\bar{\vec{E}}$ – вектор макроскопічної напруженості електричного поля. Опускаємо також значки усереднення у всіх зарядів та струмів: $\bar{\vec{j}} = \vec{j}, \bar{\rho} = \rho, \ldots$ Рівняння (10.2) приймають вигляд

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{B} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{ext}); \\ \mathrm{rot}\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{ext}) + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \qquad (10.5)$$

Система рівнянь (10.5) є неповною, доки не визначено зв'язок між $\rho, \vec{j}$ та $\vec{E}, \vec{B}$ або між $\rho, \vec{j}$ та $\rho_{ext}, \vec{j}_{ext}$. Реально доводиться вводити феноменологічні моделі або експериментальні залежності між $\rho, \vec{j}$ та $\vec{E}, \vec{B}$.

В багатьох випадках можна вважати, що зв'язок між густиною струму та напруженістю електричного поля є лінійним. Для ізотропного середовища

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Для анізотропного середовища

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta. \tag{10.6}$$

Це відомий закон Ома в диференціальній формі, σ та $\sigma_{\alpha\beta}$ – питома електропровідність для ізотропного середовища та тензор електропровідності (симетричний тензор 2-го рангу) для анізотропного середовища.

Властивості середовищ – металів, напівпровідників, діелектриків, надпровідників, плазми, магнетиків – дуже різноманітні. Тому й задачі електродинаміки суцільних середовищ дуже різноманітні.

Ми розглянемо лише деякі з них.

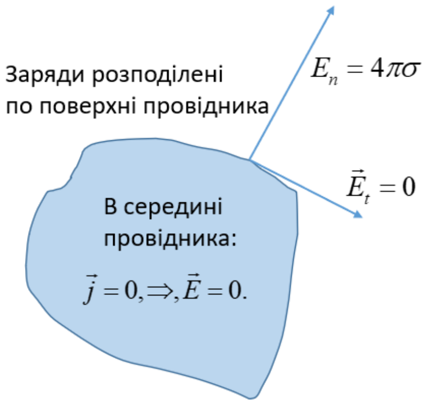
10.2. Постійне електричне поле в середовищах

10.2.1. Постійне електричне поле при наявності провідників

Зовні від провідників постійне електричне поле визначається розглянутими раніш у розділі 6 рівняннями Максвелла:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0. \end{cases} \tag{10.7}$$

Магнітне поле відсутнє – $\vec{H} = \vec{B} = 0.$



Всередині провідників електростатичного поля немає. Якби було всередині електричне поле, то там протікав би електричний струм. Але $\vec{j}=0,\Rightarrow,\vec{E}=0.$

Заряди розподілені по поверхні провідника, причому

$$\begin{aligned} E_n\big|_s &= 4\pi\sigma; \\ \vec{E}_t\big|_s &= 0; \end{aligned} \tag{10.8}$$

Умова відсутності тангенціальної компоненти означає відсутність поверхневого струму. Нормальні компоненти напруженості визначаються густиною поверхневих зарядів – мають скінчений стрибок на поверхні.

Електростатичне поле є потенціальним ($\mathrm{rot}\vec{E}=0$). Його напруженість можна виразити через скалярний потенціал

$$\vec{E}=-\nabla\varphi.$$

Скалярний потенціал зовні від провідників визначається рівнянням Лапласа

$$\Delta\varphi=0; \tag{10.9}$$

Граничні умови для потенціалу

$$\begin{aligned} \varphi\big|_s &= const; \\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_s &= -4\pi\sigma. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Поверхня провідника є еквіпотенціальною. Силові лінії електростатичного поля перпендикулярні поверхні провідника.